

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Демонстрационный вариант

Продолжительность не более 180 минут

К задачам 1 – 5 напишите только ответы

1 (Б, П, В)

Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 440 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?

2 (Б, П, В)

Найдите натуральное число n , для которого верно равенство

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 158.$$

3 (Б, П, В)

Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию, причём больший угол в три раза больше меньшего. Найдите отношение радиуса описанной около этого треугольника окружности к радиусу окружности, вписанной в него.

4 (Б, П, В)

Найдите значение выражения $z^3 - \frac{64}{z^3}$, если $z - \frac{4}{z} = -2$.

5 (П, В)

Найдите трёхзначное натуральное число, у которого ровно 7 делителей.

Напишите полные и обоснованные решения к задачам 6-9

6

На поддоне белой маркерной доски в беспорядке лежат 4 зеленых, 5 красных и 7 черных фломастеров. Учитель не глядя берет два случайных фломастера – один для себя, а другой дает ученику, отвечающему у доски.

(Б): Найдите вероятность того, что учитель вытащит для себя красный фломастер.

(П,В): Какова вероятность того, что эти фломастеры окажутся разных цветов?

7 (Б, П, В)

Решите уравнение $3^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} = 2\sqrt{3}$.

8 (Б, П, В)

Прямая касается окружности в точке C и параллельна хорде AB длиной 10. Найдите радиус окружности, если $AC = 13$.

9 (П, В)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 2x - y - 2)\sqrt{x+3}}{\sqrt{5-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

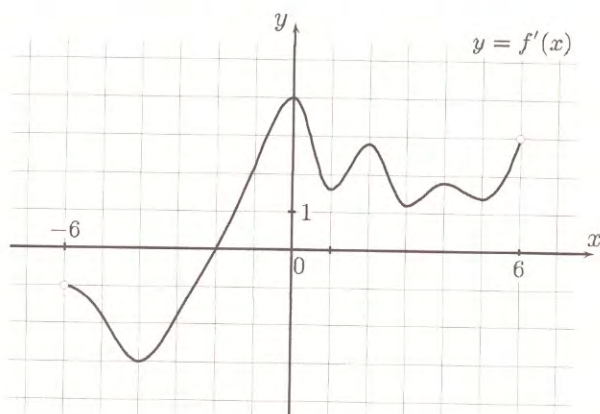
10 (Б, П, В)

Вы проводите урок по теме «Корни квадратного уравнения». Укажите две типичные ошибки, которые школьники допускают при вычислении корней. Кратко опишите один-два метода для развития навыков самопроверки при решении квадратных уравнений.

11

На экзамене было дано задание.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. В какой точке отрезка $[-1; 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Среди ответов наиболее часто встречались четыре числа: -4 ; -2 ; -1 ; 3 .

(Б): а) Какую ошибку совершил ученик, выбрав ответ -4 ?

(П, В) а) Какой ответ правильный?

(П, В) б) В результате каких ошибок могли быть получены неверные ответы из приведенного списка? Предложите вариант объяснения для каждого из них.

12 (Б, П, В)

Ниже дано решение неравенства $\log_{x-1}(9-12x+4x^2) \leq 2$. Прокомментируйте решение.

Укажите ошибки и неточности, если они есть.

Решите неравенство:

$$\log_{x-1}(9-12x+4x^2) \leq 2$$

Решение:

ОДЗ

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \\ 9-12x+4x^2 > 0 \end{cases}$$
$$\log_{x-1}(3-2x)^2 \leq 2$$
$$2 \log_{x-1}(3-2x) \leq 2 \quad \text{и} \quad 3-2x > 0$$
$$\log_{x-1}(3-2x) \leq 1 \quad \text{и} \quad 3-2x > 0$$

1. Если $x-1 > 0$ и $x-1 < 1$, то

$$3-2x \geq x-1$$
$$\begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \\ 3x \leq 4 \end{cases} \quad 1 < x \leq \frac{4}{3}$$

2. Если $x-1 > 1$, то

$$0 < 3-2x \leq x-1$$
$$\begin{cases} x > 2 \\ x \leq \frac{3}{2} \\ 3x \geq 4 \end{cases} \quad \text{Дополнительно}$$

Ответ: $(1; \frac{4}{3}]$ ~~Дополнительно~~

Ответы, решения и критерии проверки

1	20
2	315
3	$1 + \sqrt{3}$
4	-32
5	729

6

На поддоне белой маркерной доски в беспорядке лежат 4 зеленых, 5 красных и 7 черных фломастеров. Учитель не глядя берет два случайных фломастера – один для себя, а другой дает ученику, отвечающему у доски. Какова вероятность того, что эти фломастеры окажутся разных цветов?

Решение.

Найдем вероятность противоположного события «фломастеры одного цвета». Она равна

$$\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} + \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} = \frac{37}{120}.$$

Следовательно, искомая вероятность равна $1 - \frac{37}{120} = \frac{83}{120}$.

Ответ: $\frac{83}{120}$.

7

Решите уравнение $3^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} = 2\sqrt{3}$.

Решение.

Замена $y = 3^{\cos^2 x}$ дает $y + \frac{3}{y} = 2\sqrt{3}$, откуда

$$y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 0; \quad y = \sqrt{3}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}; \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

8

Прямая касается окружности в точке C и параллельна хорде AB длиной 10. Найдите радиус окружности, если $AC = 13$.

Решение.

Вписанный треугольник ABC равнобедренный с основанием $AB = 10$ и боковыми сторонами $AC = BC = 13$. Высота, проведенная к основанию AB равна 12, поэтому площадь треугольника равна 60. Радиус окружности равен

$$\frac{10 \cdot 13 \cdot 13}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24}.$$

Ответ: $\frac{169}{24}$.

9

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 2x - y - 2)\sqrt{x+3}}{\sqrt{5-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

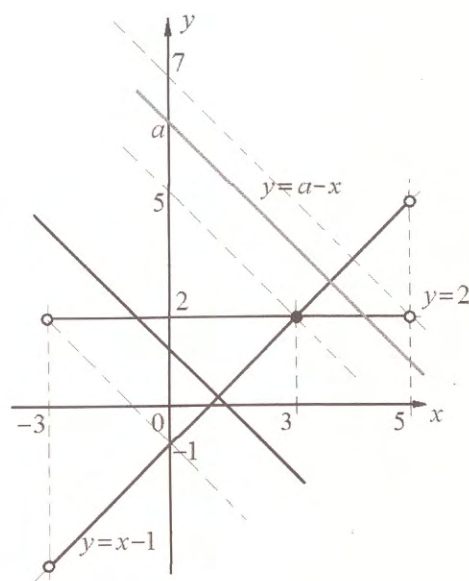
Первое уравнение равносильно уравнению

$$(y - x + 1)(y - 2) = 0 \text{ на интервале } -3 < x < 5, \text{ откуда}$$

$$y = 2 \text{ или } y = x - 1 \text{ при } -3 < x < 5.$$

График решения состоит из интервалов двух прямых с общей точкой $(3; 2)$ (см. рисунок). Прямая $y = a - x$ пересекает это множество в двух различных точках при $-1 < a < 5$ и при $5 < a < 7$.

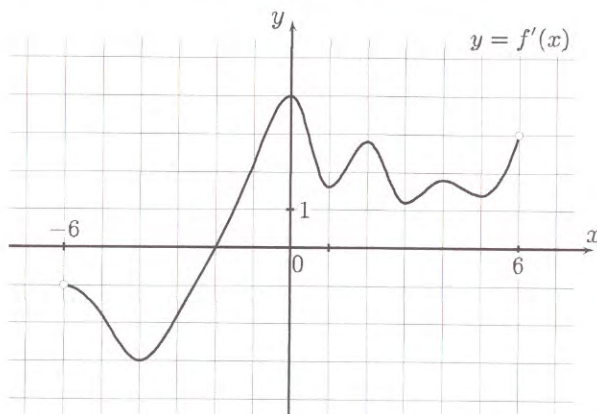
Ответ: $-1 < a < 5$; $5 < a < 7$.



11

На экзамене было дано задание.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. В какой точке отрезка $[-1; 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Среди ответов наиболее часто встречались четыре числа: -4 ; -2 ; -1 ; 3 .

а) Какой ответ правильный?

б) В результате каких ошибок могли быть получены неверные ответы из приведенного списка? Предложите вариант объяснения для каждого из них.

Решение.

Верный ответ -1 . Точка -4 – точка минимума производной, точка -2 получается, если не принимать во внимание ограничение $x \in [-1; 4]$, точка 3 – точка минимума производной на отрезке $[-1; 4]$.

12

Ниже дано решение неравенства $\log_{x-1}(9-12x+4x^2) \leq 2$. Прокомментируйте решение.

Укажите ошибки и неточности, если они есть.

Возможный комментарий.

Допущена ошибка при преобразовании выражения $\log_{x-1}(3-2x)^2$. Верный переход был бы к $2\log_{x-1}|3-2x|$. В результате этой ошибки были бы потеряны решения при $x > \frac{3}{2}$, если бы они были.